Проф. Др Војислав Андрић

ЛИНЕАРНА ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА

Диофантове једначине смо решавали у петом, шестом и седмом разреду. Тада смо се упознали и са појмом Диофантове једначине и појмом решења Диофантове једначине. Циљ ове наставне теме је да се детаљно размотре линеарне Диофантове једначине.

Ако су a, b и c цели бројеви и $ab \neq 0$, онда се линеарна једначина $ax + by = c$, при чему су x и y цели бројеви, назива линеарна Диофантова једначина са две непознате.

Свака линеарна једначина са две промењиве и целобројним коефицијентима може се свести на једначину облика $ax + by = c$.

Већ је речено је да су основна питања везана за сваку Диофантову једначину:

1. Доказати или оповргнути постојање решења.
2. Да ли једначина има коначно или бесконачно решења?
3. Ако једначина има коначно решења колико је то?
4. Ако једначина има коначно решења, одредити сва њена решења;
5. Ако једначина има бесконачно много решења, одредити формуле које дају сва решења (ако је то могуће);
6. Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

Одговоре на ова питања, када је реч о линеарној Диофантовој једначини са две променљиве, дају следећи примери и теореме, при чему ће нека питања и проблеми бити третирани на више начина, као на пример, сам алгоритам за решавање линеарне Диофантове једначине.

<u>*ПРИМЕР 1.*</u> *Имају ли једначине $x + y = 2006$ и $2x + 10y = 2005$ решења у скупу целих бројева?*

РЕШЕЊЕ: Прва једначина очигледно има бесконачно много решења, јер је уређени пар $(x, y) = (x_0, 2006 - x_0)$, где је x_0 било који цео број, опште целобројно решење дате једначине.

Друга једначина нема решења јер је за ма који пар целих бројева (x, y) на десној страна једначине непаран број, а на левој паран број.

Егзистенција решења једначине $ax + by = c$ у скупу целих бројева се може установитзи на основу следеће теореме.

<u>*ТЕОРЕМА 1.*</u> *Потребан и довољан услов да линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) има решење је да је број c дељив са НЗД (a, b).*

ДОКАЗ: Нека је НЗД $(a, b) = d$ $(d \neq 1)$.

Ако је (x_0, y_0) једно целобројно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$, тада је $ax_0 + by_0 = c$. Тада постоје узајамно прости цели бројеви κ и l такви да је $a = \kappa d$ и $b = ld$. Значи да је $\kappa dx_0 + ldy_0 = c$, тј. $d(\kappa x_0 + ly_0) = c$. Лева страна једнакости је дељива са d, па мора бити и десна, тј. $d \mid c$.

Обрнуто, нека $d \mid c$. Тада постоји цео број m такав да је $c = md$. Како се број d може представити[1] као хомогена линеарна функција од a и b, то је $d = \alpha a + \beta b$ $(\alpha \in Z, \beta \in Z)$. Тада је $c = md = m(\alpha a + \beta b) = a(m\alpha) + b(m\beta)$, па је $x = m\alpha$, $y = m\beta$, једно решење дате једначине. ◊

---

[1] Видети: (40) Владимир Мићић, Зоран Каделбург, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева – Друштво математичара Србије, Београд, 2004. – стр. 44.

Наведимо и две непосредне последице доказане теореме.

<u>ПОСЛЕДИЦА 1.</u> Линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) има увек решење ако је НЗД $(a, b) = 1$, тј. уколико су a и b узајамно прости цели бројеви.

<u>ПОСЛЕДИЦА 2.</u> Линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) нема решења ако се НЗД (a, b) не садржи у c.

<u>ПРИМЕР 2.</u> Доказати да једначина $2x + 5y = 111$ има бесконачно много целобројних решења, а једначина $3x + 6y = 1000$ нема целобројних решења.

РЕШЕЊЕ: Бројеви 2 и 5 су узајамно прости, па прва једначина на основу последице 1. увек има решења.

Како је НЗД (3, 6) = 3 и како се 3 не садржи у 1000, на основу последице 2, друга једначина нема целобројних решења.

Ако једначини $ax + by = c$, има решења, тј. уколико је НЗД $(a, b) = d$ $(d \neq 1)$ делилац броја c, тада постоје цели бројеви $к$, l и m, такви да је $a = кd$, $b = ld$ и $c = md$. Једначина тада постаје $кdx + ldy = md$ или $кx + ly = m$. При том су $к$ и l узајамно прости.

Како је проблем егзистенице решења једначине $ax + by = c$ претходним разматрањима разрешен, следи покушај да се пронађе и алгоритам за решавање свих линеарних Диофантових једначина.

ОЈЛЕРОВ МЕТОД

<u>ПРИМЕР 3.</u> Одредити сва решења једначине $3x + 7y = 89$, ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како су 3 и 7 узајамно прости бројеви то једначина увек има решење.

Решавањем једначине по x и трансформацијом њене десне стране у количник, добија се једна–кост $x = \dfrac{89-7y}{3} = 29 - 2y - \dfrac{y-2}{3}$, па је x цео број само ако је број $y - 2$ дељив са 3, тј. ако је
$y - 2 = 3к$, где је $к$ неки цео број. Тада је $y = 3к + 2$, а $x = 25 - 7к$. Добијено решење је опште решење дате једначине и дата једначина има бесконачно много решења, јер се за свако целобројно $к$ добије уређени пар $(x, y) = (25–7к, 3к+2)$ који је решење дате једначине.

Овај поступак који је у теорији познат као Ојлеров често није функционалан, јер се до коначног решења долази применом илустрованог поступка у неколико корака.

<u>ПРИМЕР 4.</u> Одредити сва решења једначине $40y – 63x = 521$ ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како су 40 и 63 узајамно прости бројеви једначина има решење.

Из дате једначине је $40y = 63x + 521$, па је $y = \dfrac{80x + 520 + 1 - 17x}{40}$.

Следи да је $y = 2x + 13 - \dfrac{17x-1}{40}$. Да би y био цео број мора бити $\dfrac{17x-1}{40} = a$, где је a неки цео број. Како је $17x – 1 = 40a$, то следи да је $x = \dfrac{40a+1}{17} = 2a + \dfrac{6a+1}{17}$. Сада ће x бити цео број ако је

$\frac{6a+1}{17} = b$. Одавде је $6a + 1 = 17b$. Дакле, $a = \frac{17b-1}{6} = 3b - \frac{b+1}{6}$. Да би a био цео број мора бити $b + 1 = 6к$, одакле је $b = 6к - 1$. Тада је $a = 3(6к - 1) - к = 17к - 3$, а одавде је $x = 2(17к - 3) + 6к - 1 = 34к - 6 + 6к - 1 = 40к - 7$. Коначно, $y = 2\,(40к - 7) + 13 - a = 80к - 14 + 13 - 17к + 3 = 63к + 2$. Дакле, опште решење дате једначине је $x = 40к - 7$, $y = 63к + 2$ ($к \in Z$).

Међутим, иако је изложени поступак једноставан, он није лак за техничку реализацију. Зато се поставља питање налажења ефикаснијег метода за решавање линеарне Диофантове једначине.

МЕТОД ПОЧЕТНОГ РЕШЕЊА

Нека је (x_0, y_0) једно целобројно решење једначине $ax + by = c$, где су a и b узајамно прости цели бројеви. Како је $ax_0 + by_0 = c$, то је и $ax + by = ax_0 + by_0$. Тада је $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Ако се цела једначина подели са b (јер b није нула) добија се да је $\frac{a}{b}(x - x_0) + y - y_0 = 0$. Како је десна страна једнакости цео број то мора бити и лева. Бројеви a и b су узајамно прости цели бројеви, што значи да $x - x_0$ мора бити дељиво са b. Дакле, $x - x_0 = кb$, где је $к$ било који цео број. Тада је $x = x_0 + bк$, а $y = y_0 - aк$. Тиме је добијен један рационалан поступак за решавање једначине $ax + by = c$ који је прецизиран следећом теоремом.

<u>ТЕОРЕМА 3.</u> Ако је уређени пар (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$ ($ab \neq 0$ и a и b су узајамно прости цели бројеви), тада и само тада је релацијама $x = x_0 + bк$ и $y = y_0 - aк$ ($к \in Z$) дефинисано опште решење дате једначине.

ДОКАЗ: Ако је (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$, тада је $ax_0 + by_0 = c$. Како је $x = x_0 + bк$ и $y = y_0 - aк$ ($к$ је цео број), онда је $ax + by = a(x_0 + bк) + b(y_0 - aк) = ax_0 + abк + by_0 - baк = ax_0 + by_0 = c$, што доказује да је $x = x_0 + bк$ и $y = y_0 - aк$ једно решење дате једначине.

Докажимо и да других решења нема. Претпоставимо да је (α, β) једно од решења дате једначине које се не може приказати у облику $(x_0 + bк, y_0 - aк)$.

Ако је (α, β) једно решење дате једначине, онда је $a\alpha + b\beta = c$. Како је за свако целобројно $к$ и $a(x_0 + bк) + b(y_0 - aк) = c$, то је $a(x_0 + bк) + b(y_0 - aк) = a\alpha + b\beta$. Тада је $a(x_0 + bк - \alpha) + b(y_0 - aк - \beta) = 0$.

Како су a и b различити од 0, то је $x_0 + bк - \alpha = -\frac{b(y_o - aк - \beta)}{a}$. Због тога што су a и b узајамно прости бројеви следи да је $y_0 - aк - \beta$ дељиво са a, па $y_0 - aк - \beta = a\,(m \in Z)$. Следи да је $\beta = y_0 - aк - am = y_0 - a(к + m)$. Ако је $к + m = n$ ($n \in Z$), тада је $\beta = y_0 - an$. У том случају је $x_0 + bк - \alpha = - bm$, па је $\alpha = x_0 + bк + bm = x_0 + b(к + m) = x_0 + bn$. Коначно се добија $\alpha = x_0 + bn$, $\beta = y_0 - an$, што је противуречност са претпоставком.◊

<u>ПРИМЕР 5.</u> Одредити сва решења једначине $4x + 5y = 100$, ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како је $x_0 = 0$, $y_0 = 20$ једно решење дате једначине, то су сва решења дате једначине дефинисана са: $x = 5к$, $y = 20 - 4к$ ($к \in Z$).

НАПОМЕНА: Зависно од избора "почетног" решења могу се добити наизглед "различити", а у суштински иста решења линеарне Диофантове једначине: Ако је $x_0 = 25$, $y_0 = 0$ добија се решење $x = 25 + 5t$, $y = -4t$ ($t \in Z$). Сменом $t = к - 5$, ово решење постаје $x = 5к$, $y = 20 - 4к$, тј. идентично је са добијеним.

ПРИМЕНА ЛИНЕАРНИХ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Линеарне Диофантове једначине нису саме себи циљ и познавање алгоритма за њихово решавање не значи ништа уколико се он не примени у подесним ситуацијама. Следећи примери ће показати колико су линеарне Диофантове једначине корисно средство за решавање разних Диофантових проблема теоријске, али и практичне природе.

ПРИМЕР 6. Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да је $4x + 7y = 2005$?

РЕШЕЊЕ: Како је $4 \cdot 496 + 7 \cdot 3 = 2005$, то је почетно решење дате једначине $(x_o, y_o) = (496, 3)$. Опште решење је тада $x = 496 - 7к$; $y = 3 + 4к$ ($к$ је цео број). Оно што се тражи је да x и y истовремено буду природни, па мора бити: $x = 496 - 7к > 0$ и $y = 4к + 3 > 0$. Из прве неједнакости је $7к < 496$, па је $к \le 70$. Због друге неједнакости је $4к > -3$, што значи да је $к \ge 0$. Према томе $0 \le к \le 70$, па се добија тачно 71 решење код кога су x и y природни бројеви.

ПРИМЕР 7. У берберској радњи Илије Докмановића раде бербери Мића и Јанко. Они су за тачно 100 динара ошишали чету капетана Златковића која броји тачно 100 војних лица. Ако су војнике шишали за пола динара, подофицире за један динар, а официре за пет динара, колико војника, подофицира и официра су подшишали Мића и Јанко?[2]

РЕШЕЊЕ: Нека је број ошишаних војника x, број ошишаних подофицира y и број ошишаних официра z. Тада је $x + y + z = 100$, јер их укупно има 100. Цена шишања је $\frac{1}{2}x + y + 5z = 100$. Две добијене једначине представљају систем Диофантових једначина са три непознате. Ако се од прве једначине одузме друга добија се $\frac{1}{2}x - 4z = 0$. Следи да је $x = 8z$. Тада је $8z + y + z = 100$, па је $y = 100 - 8z$. Према томе опште решење добијеног система једначина је: $x = 8к$; $y = 100 - 9к$; $z = к$. С обзиром да је $0 \le x = 8к \le 100$ и , $0 \le y = 100 - 9к \le 100$, то је $0 \le к \le 11$.

Сва "реална" решења проблема дата су у следећој табели, јер теоријски, задатак има бесконачно решења, а у свакодневној, животној ситуацији свега 12:

$к$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
y	100	91	82	73	64	55	46	37	28	19	10	1
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

У наредним примерима нема експлицитно линеарних Диофантових једначина, али је линеарна једначина инструмент за решавање неких интересантних Диофантских проблема.

ПРИМЕР 8. Одредити све уређене парове (x, y) целих бројева x и y тако да је $7x^2 - 3y^2 = 17$.

РЕШЕЊЕ: Нека је $x^2 = a$ и $y^2 = b$. Дата линеарна Диофантова једначина је тада еквивалентна са једначином $7a - 3b = 17$ ($a \ge 0$, $b \ge 0$). Једно решење дате једначине је $a_0 = 2$, $b_0 = -1$, па је опште решење једначине $7a - 3b = 17$, дато формулама $a = 3к + 2$, $b = 7к - 1$. Дакле, $x^2 = 3к + 2$ и $y^2 = 7к - 1$.

---

[2] Задатак постављен у берберској радњи Илије Докмановића у Ваљеву у јануару 1961. године.

Како је $x^2 = 3к + 2$, то једначина нема решења, јер није могуће да квадрат природног броја при дељењу са 3 даје остатак 2.

ПРИМЕР 9. *Постоје ли цели бројеви x и y такви да важи једнакост:* $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 5y = 7$?

РЕШЕЊЕ: Ако је $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 5y = 7$, онда је $3x^2 - 3xy + 3x - 2xy + 2y^2 - 2y - 7x + 7y - 7 = 0$. То значи да је $3x(x - y + 1) - 2y(x - y + 1) - 7(x - y + 1) = 0$, па је $(x - y + 1)(3x - 2y - 7) = 0$[3]. Тада је $x - y + 1 = 0$ или $3x - 2y - 7 = 0$. Према томе, дата једначина има бесконачно много решења, а сва решења дате једначине описана су формулама: 1) $x = к$ и $y = к + 1$; 2) $x = 2к + 1$ и $y = 3к - 2$ $(к \in \mathbb{Z})$.

ПРИМЕР 10. *Нека су* $x_1, x_2, \ldots, x_{2005}$ *природни бројеви такви да је* $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2005}^2 = 2035$. *Одредити* $x_1, x_2, \ldots, x_{2005}$.

РЕШЕЊЕ: Већина бројева x_i једнака је 1, а само неки од њих су већи од 1. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_к \geq 2$, а сви остали $x_{к+1} = \ldots = x_{2005} = 1$. Тада је $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_к^2 \geq 4к$, па је због тога $2035 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_к^2) + (x_{к+1}^2 + \ldots + x_{2004}^2 + x_{2005}^2) \geq 4к + (2005 - к) = 3к - 2005$. Из неједнакости $2035 \geq 3к - 2005$ следи да је $3к \leq 30$, па је $к \leq 10$. Дакле $x_{11} = \ldots = x_{2005} = 1$, па је $x_{11}^2 + x_{13}^2 + \ldots + x_{2005}^2 = 2005 - 10 = 1995$. Према томе $x_1^2 + \ldots + x_{10}^2 = 2035 - 1995 = 40$.

Ако у скупу $\{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$ има a јединица, b двојки, c тројки, d четворки, e петица и f шестица, онда је: $a + b + c + d + e + f = 10$ и $a + 4b + 9c + 16d + 25e + 36f = 40$. Ако се од друге одузме прва једначина добија се линеарна Диофантова једначина $3b + 8c + 15d + 24e + 35f = 30$. Тада је $f = 0$. Ако је $e = 1$, онда је $3b + 8c + 15d = 6$. У том случају би било $b = 2$, а остали би били 0, па би било $a + b + c + d + e + f = 3$, што је немогуће, јер тај збир износи 10. Дакле $e = 0$, па је $3b + 8c + 15d = 30$. Како су $3b$, $15d$ и 30 дељиви са 3, то мора бити и $8c$, па се разлику два случаја $c = 3$ или $c = 0$.

1) Ако је $c = 3$, онда је $3b + 24 + 15d = 30$, па је $b + 5d = 2$ и има једно решење:
- $b = 2$ и $d = 0$, $c = 3$, $e = f = 0$, $a = 5$, па је $3^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 27 + 8 + 2000 = 2035$ (3 тројке, 2 двојке и 2000 јединица);

2) Ако је $c = 0$, онда је $3b + 15d = 30$, па је $b + 5d = 10$ и има три решења:
- $b = 10$, $a = c = d = e = f = 0$, па је $2^2 + \ldots 2^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 40 + 1995 = 2035$ (10 двојки и 1995 јединица);
- $b = 5$ и $d = 1$, $c = e = f = 0$, $a = 4$, па је $4^2 + 2^2 + \ldots 2^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 16 + 20 + 1999 = 2035$ (1 четворка, 5 двојки и 1999 јединица);
- $b = 0$ и $d = 2$, $c = e = f = 0$, а = 8, па је $4^2 + 4^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 32 + 2003 = 2035$ (2 четворке и 2003 јединица).

Дакле дата једначина има 4 различита решења.

ЗАДАЦИ

1. Влада је купио свеске по цени од 7 динара и оловке по цени од 4 динара и за то потрошио 60 динара. Колико је Влада купио оловки, а колико свески ?
2. Износ од 2007 динара плаћен је новчаницама од 2 динара и 5 динара. Колико је којих новчаница било ?
3. Одредити све целе бројеве x и y такве да је $4x + 9y = 58$.

---

[3] Дата формула у xOy систему представља две праве које се секу у тачки $(x, y) = (9, 10)$.
Решење (9, 10) је заједничко за оба општа решења дате једначине.

4. У једном разреду било је 15 девојчица и 18 дечака. Како ће они међусобно поделити 1234 кликера тако да сви дечаци добију једнак број кликера и све девојчице, такође, добију једнак број кликера ?

5. Доказати да следеће једначине немају целобројних решења:

   a) $3x + 15y = 2006$; b) $21x - 35y = 88$; c) $18x^2 - 33y^2 = 4444444$.

6. Одредити једно решење, а затим написати опште решење следећих линеарних Диофантских једначина: a) $3x - 5y = 77$; b) $4x + 11y = 121$; c) $7x - 100y = 35$.

7. Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да важи једнакост $3x + 7y = 555$?

8. Одредити све природне бројеве који задовољавају једначине:
   a) $x + 2y + 3z = 16$; b) $2x + 3y + 4z = 23$.

9. На складишту се налазе ексери упаковани у сандуке од 16, 17 или 40 килограма. Како, не отварајући сандуке, купцу испоручити тачно 100 кg екесера ?

10. Девојка Шехерезада је из ноћи у ноћ причала моћном султану по 3 или по 5 бајки. За колико је највише ноћи могла да исприча 1001 причу ? За колико је ноћи најбрже то могла да учини ?

11. У једној књижари свеска кошта 0,5 (пола) €, збирка 2€, а уџбеник 5€. На колико се начина за тачно 100 € може купити тачно 100 предмета?

12. Одредити природне бројеве x и y тако да је $x^2 + 4y^2 = 244$.

13. У скупу природних бројева решити једначину: $5x^2 + 3y^2 = 1033$

14. На колико начина се помоћу судова од 2 и 7 литара може напунити буре чија је запремина 1234 литра. Који је најбржи, а који је најспорији начин да се то уради ?

15. Доказати да се коцка са ивицом дужине 13 може исећи на 1995 мањих коцки са ивицама дужине 1, 2 или 3. Колико се при том добија коцки чија ивица има дужину 3?

16. Разломак $\frac{281}{140}$ представити као збир три разломка чији су и бројиоци и имениоци једноцифрени бројеви.[4]

17. Одредити троцифрени број чије су све цифре различите од нуле, а збир свих различитих двоцифрених бројева састављених од цифара овог броја (цифре се не могу понављати) једнак је том броју.

18. На колико начина се број 1984 може представити као збир узастопних природних бројева и који су то бројеви?

19. Одредити шестоцифрен број чији производи са 2, са 3, са 4, са 5 и са 6 представљју такође шестоцифрене бројеве који се пишу у истим цифрама као и тражени број.

20. Коцка ивице 13cm исечена је на 1994 мање коцке са целобројном дужином ивица. Колике су димензије добијених коцки и колико којих коцки има?

21. Одредити све троцифрене бројеве који су 15 пута већи од збира својих цифара.

22. *У соби се налазе столице са 3 и са 4 ноге. Када на све столице седну људи, у соби је укупно 69 ногу. Колико у соби има столица са 3, а колико са 4 ноге?

23. Ученик треба да реши 20 задатака. За свако тачно решење добија 8 поена, за нетачно решење му се одузима 5 поена, а задатак који није решавао се не бодује. Ученик је сакупио 13 поена. Колико задатака је тачно решио?

---

[4] Ово је први проблем, који се своди на Диофантову једначину, који се појавио на једном математичком такмичењу у нашој земљи.

24. Одредити колико парова природних бројева (x, y) задовољава једначину $3x + 8y = 1996$.

25. У координатној xOy равни дата је тача M са координатама (5, 3). Кроз тачку M конструисана је права p која координатне осе сече у тачкама A $(a, 0)$ и B $(0, b)$. Одредити све вредности a и b тако да су и a и b природни бројеви.

26. Ако се између цифара двоцифреног природног броја напише нула добија се број који је 9 пута већи од датог. Одредити о којим бројевима је реч.

27. У xOy координатној равни дата је права $4x + 7y = 1998$. Колико тачака на датој правој имају обе координате целобројне и припадају првом квадранту координатне равни ?

РЕШЕЊА

1. Ако је број свески x, а број оловака y, онда је $7x + 4y = 60$. Јасно је да x мора бити дељиво са 4, па у обзир долазе следећа решења: $x = 0$, $y = 15$; $x = 4$, $y = 8$; $x = 8$, $y = 1$.

2. Нека је било x новчаница од 2 динара и y новчаница од 5 динара. Тада је $2x + 5y = 2007$. Једно решење дате једначине је $x_o = 1$, $y_o = 401$, па је опште решење: $x = 5к + 1$, $y = 401 – 2к$. Како је $1 \le x \le 1003$ и $1 \le y \le 401$ следи да је $1 \le 5к + 1 \le 1003$ и $1 \le 401 – 2к \le 401$, или $0 \le к \le 200$, па се тражена исплата може извршити на тачно 201 начин.

3. Једно решење дате једначине је $x_o = 10$, $y_o = 2$, па је опште решење: $x = 9к + 10$, $y = 2 – 4к$.

4. Нека су x и y број кликера које треба да добију девојчице, односно дечаци. Тада је $15x + 18y = 1234$ и једначина нема решења, јер је лева страна једнакости дељива са 3, а десна није.

5. a) D (3, 15) = 3, а 2006 није дељиво са 3;
   b) D (21, 35) = 7, а 88 није дељиво са 7;
   c) D (18, 33) = 3, а број 4444444 није дељив са 3. .

6. a) $x_o = 29$, $y_o = 2$, а опште решење је $x = 5к + 29$, $y = 3к + 2$.
   b) $x_o = 0$, $y_o = 11$, а опште решење је $x = 11к$, $y = 11 - 4к$.
   c) $x_o = 5$, $y_o = 0$, а опште решење је $x = 100к + 5$, $y = 7к$.

7. Једно решење дате једначине је $x_o = 185$, $y_o = 0$, па је опште решење: $x = 185 – 7к$, $y = 3к$. Како је $3 \le x \le 185$ и $3 \le y \le 79$ следи да је $3 \le 3к \le 79$, па је $1 \le к \le 26$, и дата једначина има тачно 26 решења у скупу природних бројева: (3, 78); (10, 75); ... (171, 6); (178, 3).

8. a) Како је $x + 2y \ge 3$, то је $3z \le 16 – 3 = 13$, па је $1 \le z \le 4$. Разматрајући све могуће случајеве добијају се решења: (1, 6, 1); (3, 5, 1); (5, 4, 1); (7, 3, 1); (9, 2, 1); (11, 1, 1); (2, 4, 2); (4, 3, 2); (6, 2, 2); (8, 1, 2); (1, 3, 3); (3, 2, 3); (5, 1, 3); (1, 1, 4).

   b) Како је $2x + 3y \ge 5$, то је $4z \le 23 – 5 = 18$, па је $1 \le z \le 4$. Разматра-јући све могуће случајеве добијају се решења: (8, 1, 1); (5, 3, 1); (2, 5, 1); (3, 3, 2); (6, 1, 2); (4, 1, 3); (1, 3, 3); (2, 1, 4).

9. Нека су x, y и z редом бројеви испоручених сандука од 16, 17 и 40 кг. Тада је $16x + 17y + 40z = 100$. Очигледно је y паран број $z = 0$, јер једначине $16x + 17y = 60$ и $16x + 17y = 20$ немају решења. Тада је $16x + 17y = 100$, па је $x = 2$, $y = 4$, $z = 0$ једино могуће решење.

10. Ако је x број ноћи у којима је Шехерезада причала 3, а y број ноћи у којима је причала 5 бајки, онда је $3x + 5y = 1001$. Тада је (332, 1) једно решење дате једначине, па је опште решење: $x = 332 – 5к$, $y = 3к + 1$. Како је $0 \le y = 3к + 1 \le 200$, то је $0 \le к \le 66$, па проблем има 67 решења. Најбржи начин да се испричају бајке је ако је y што веће, тј. за 201 ноћ, а најспорије ако је x што веће дакле за 333 ноћи.

11. Нека је број свески x, број збирки y и број уџбеника z. Тада је $x + y + z = 100$, јер их укупно има 100. Потрошено је укупно $\frac{1}{2}x + 2y + 5z = 100$. Две добијене једначине представљају систем Диофантових једначина са три непознате $x + y + z = 100$ и $x + 4y + 10z = 200$. Ако се од друге једначине одузме прва добија се $3y + 9z = 100$. Добијена једначина нема решења, јер је лева страна једначине дељива са 3, а десна није, па је немогуће за 100 динара купити 100 предмета.

12. Ако је $x^2 = a$ и $y^2 = b$, добија се једначина $a + 4b = 244$. Једно њено решење је: $a_o = 0, b_o = 61$, па је $a = x^2 = 4к$ и $b = y^2 = 61 – к$. Следи да бројеви $к$ и $61 – к$ морају бити потпун квадрати. Значи да је $к = 25$ или $к = 36$. Тада су решења: $x = 10, y = 6$ или $x = 12, y = 5$.

13. Нека је $x^2 = a$ и $y^2 = b$, добија се једначина $5a + 3b = 1033$. Једно њено решење је: $a_o = 2, b_o = 341$, па је $a = x^2 = 3к + 2$ и $b = y^2 = 341 – 5к$. Како је $x^2 = 3к + 2$ и како су могући остаци при дељењу потпуног квадрата са 3 једнаки 0 или 1, једначина нема решења.

14. Ако је број судова од 2 литра x, а број судова од 7 литара y, онда је $2x + 7y = 1234$. Како је једно решење добијене једначине $x_o = 617, y_o = 0$, то је опште решење $x = 617 – 7к$ и $y = 2к$. Како је $1 \le x \le 617$ и $0 \le y \le 176$ следи да је $0 \le 2к \le 176$, па је $0 \le к \le 88$, и дата једначина има тачно 89 решења у скупу природних бројева: $(1, 176); (8, 174); ... (610, 2); (617, 0)$. Дакле, пуњење бурета се може учинити на 89 различитих начина, при чему је најбржи први (177 сипања), а најспорији последњи (617 сипања).

15. Нека је су x, y и z редом бројеви коцки дужине 1, 2 и 3. Тада је $x + y + z = 1995$ и $x + 8y + 27z = 13^3 = 2197$. Ако се од друге једначине одузме прва, онда је $7y + 26z = 202$. Једино "реално" решење добијене једначине у скупу N_o је $y = 14, z = 4$, па је $x = 1995 – 18 = 1977$.

16. Како је $140 = 2{\cdot}2{\cdot}5{\cdot}7$ имениоци тражених разломака морају бити једноцифрени, дакле 4, 5 и 7. Тада је $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = \frac{281}{140}$, па се добија једначина $35x + 28y + 20z = 281 \equiv 1 \pmod 4$. Закључујемо да је x непаран број мањи од 8, такав да је $35x \equiv 1 \pmod 4$. Дакле $x = 3$ или $x = 7$. Како је за $x = 7, 35x + 28x + 20z > 245 + 28 + 20 = 293 > 281$, следи да је $x = 3$. Тада је $28y + 20z = 176$ или $7y + 5z = 44$, па је $y = 2$ и $z = 6$. Тражени збир је $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{6}{7} = \frac{281}{140}$.

17. Ако је тражени број $\overline{abc}$, онда је $100a + 10b + c = \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ac} + \overline{ca} = 22(a + b + c)$, па се добија једначина: $78a = 12b + 21c$ или $26a = 4b + 7c$. Како је тражени број дељив са 22, па према томе и са 11, то је $a - b + c = 0$ или $a – b + c = 11$.

Ако је a = b - c, онда је 26(b – c) = 4b + 7c, па је 2 b = 3c, што значи да је цифра b дељива са 3, па је b једнако 3, 6 или 9. Тада су решења проблема бројеви 132, 264 и 396.

Ако је a = 11 + b – c, онда је 26(11 + b – c) = 4b + 7c, па је 26 + 2b = 3c и једначина нема решења, јер је 3c = 26 + 2b ≥ 28, што је немогуће.

18. Нека је $(a + 1) + (a + 2) + ... + (a + к) = 1984$. Тада је $кa + \frac{к(к+1)}{2} = 1984$ или $к(2a + к + 1) = 2{\cdot}1984 = 2^7{\cdot}31$. Како су бројеви к и 2a + к + 1 различите парности, то је или $к = 31$ или $к = 2^7 = 128$.
Ако је к = 31, онда је 2a + 32 = 128, па је a = 48 и тражени збир узастопних природних бројева је 49 + 47 + ... + 79 = 1984.
Ако је к = 128, онда је 2a + 129 = 31, па a није природан број.

19. Нека је тражени шестоцифрени број $к = \overline{abcdef}$. Како је и 6к шестоцифрени број, то је к ≤ 999999:6 = 166666, па је цифра a = 1. Из чињенице к < 2к < 3к < 4к < 5к < 6к следи да су прве цифре бројева к, 2к, 3к, 4к, 5к и 6к различите, што значи да су све цифре различите, и да ниједна од њих није 0. Следи да је цифра f непарна, јер ако би била парна, онда би последња цифра броја 5к била 0, што није могуће. Једна од тражених

цифара је 5, јер се 5к због непарности цифре f сигурно завршава цифром 5. Множењем непарне цифре f са 1, 2, 3, 4, 5, 6 добијају се три парне и три непарне цифре, па су три од тражених цифара парне, а три непарне.

Непарне цифре су 1, 5 и f. Број к се завршава цифром f, број 5к цифром 5, а број 3к цифром 3f, дакле, преосталом непарном цифром, а то је 1. Значи да је f = 7, па су последње цифре бројева 2к, 4к и 6к једнаке 4, 8 и 2 и тражени број к има цифре 1, 2, 4, 5, 7 и 8. Тада је 200000 ≤ 2к ≤ 299999 и добија се 100000 ≤ к ≤ 149999, па је цифра b ≤ 4. Како је 700000 ≤ 5к ≤ 799999, то је 140000 ≤ к, па је цифра b ≥ 4, што значи да је b = 4. Следи да је к један од бројева 142587, 142857, 145287, 145827, 148257 или 148527. Условима задатка одговара само број 142857, а бројеви к, 2к, 3к, 4к, 5к и 6к тада су: 142857, 285714, 428571, 571428, 714285 и 857142.

20. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_{1994}$ дужине ивица тражених коцки и нека је при том $x_1, x_2, \dots, x_к \geq 2$ и нека је $x_{к+1} = x_{к+2} = \dots = x_{1994} = 1$. Тада је $13^3 = 2197 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{1994}^3 \geq 8к + 1994 - к = 7к + 1994$, па је $7к \leq 2197 - 1994 = 203$, односно $к \leq 29$. Тада је $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{29}^3 + 1 + 1 + \dots + 1 = 1994$, па је $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{29}^3 = 2197 - 1965 = 232$. Нека је међу бројевима $x_1 \dots x_{29}$ a има вредност 1, b има вредност 2, c има вредност 3, d има вреедност 4, e има вредност 5 и f има вредност 6. Тада је a + b + c + d + e + f = 29 и a + 8b + 27c + 64d + 125e + 216f = 232. Ако се од друге једнакости одузме прва добија се7b + 26c + 63d + 124e + 215f = 203. Јасно је да је f = 0, па се добија једначина: 7b + 26c + 63d + 124e = 203. Како је 0 ≤ e ≤ 1, за e = 0 добија се једначина 7b + 26c + 63d = 203. Како су 7, 63 и 203 дељиви са 7, то је и и 26c дељиво са 7, па је c = 0 или c = 7. Следи да је 7b + 63d = 203 или 7b + 63d = 21, односно b + 9d = 29 или b + 9d = 3. Сва решења добијених једначина дата су у следећој табели:

Број коцки чија ивица има дужину:				
1	2	3	4	5
1965	29	0	0	0
1973	20	0	1	0
1981	11	0	2	0
1989	2	0	3	0
1984	3	7	0	0

21. Нека је 100x + 10y + z = 15(x + y + z). Тада је 85x = 5y + 14z. Како су 5 и 85 дељиви са 5 то мора бити и z, па се добија 17x = y или 17x = y + 14. Прва једначина нема решење (јер је y ≤ 9 и x ≥ 1), а решење друге једначи-не је: x = 1, y = 3, z = 5, тј. ради се о броју 135 = 15(1 + 3 + 5).

22. Нека се у соби налази x столица са 3 ноге и y столица са 4 ноге. Тада је 3x + 4y + 2(x + y) = 5x + 6y = 69. Како су 6 и 69 дељиви са 3, то је x непаран број дељиво са 3. Једно од могућих решења је (3, 9), па је опште решење једначине: x = 3 + 6к, y = 9 – 5к. Сва решења проблема су: (3, 9); (9, 4), и у првом случају је у соби 12, а у другом 13 људи.

23. Ако је x број тачних задатака, y број нетачних задатака, а z број нерешаваних задатака, онда је $x + y + z = 20$ и $8x - 5y = 13$. Из прве једна-чине $y = 20 - x - z$, па је $8x - 5(20 - x - z) = 13$, или $13x + 5z = 113$, па је $z = \dfrac{113 - 13x}{5} = 22 - 2x - \dfrac{3(x-1)}{5}$. Тада је x – 1 = 5к, па је x = 5к + 1, z = 20 - 13к, y = 8к - 1. За к = 0, добија се x = 6, y = z = 7.

24. Опште решење дате једначине је: x = 660 – 8к, y = 3к + 2. Да би решења били природни бројеви мора 0 ≤ к ≤ 82, па једначина има укупно 83 решења у скупу природних бројева.

25. Нека тражена права p има једначину $y = кx + n$. Како права p садржи тачке A, B и M то је: $0 = кa + n$; $b = 0 \cdot x + n$ и $3 = 5к + n$. Елиминацијом коефицијената к и n добија се $3a + 5b = ab$. Тада је $(a - 5)(b - 3) = 15$, па проблем има четири решења: $(a, b) \in \{(6, 18); (8, 8); (10, 6); (20, 4)\}$.

26. Ако је дати двоцифрени број $\overline{xy}$, онда је $100x + y = 9(10x + y)$, па је $10x = 8y$ или $5x = 4y$. Тражене цифре су $x = 4$, $y = 5$, а дати број 45.

27. Опште решење једначине $4x + 7y = 1998$ у скупу целих бројева је: $x = 496 - 7к$, $y = 4к + 2$. Следи да је $0 \leq y = 4к + 2 \leq 85$, па је $0 \leq к \leq 70$, па права садржи тачно 71 тачку чије су обе координате природни бројеви.